山西能源学院教案

授课班级__能动 1701-1704__　授课时间_____　计_2_学时

课题（章节及内容）	3.2 零维问题的分析法-集中参数法
教学目的和要求	掌握集中参数法的基本原理及应用； 熟练掌握集中参数法的计算 ； 掌握在一时间间隔内物体所传导热量的计算方法； 了解在一段时间间隔内物体所传导热量的计算方法。
重　点 难　点	集中参数法温度场的分析解； 非稳态条件下时间常数的意义和计算方法。
教学进程（含课堂教学内容、教学方法、辅助手段等）	教学内容：集中参数法温度场的分析解；到热量计算式、时间常数与傅里叶数；集中参数法的适用范围。 教学方法：讲授与练习、启发讨论、诱导式、归纳总结法。
作业布置	3-12 2-13 3-15
主　要 参考资料	《传热学》第四版，杨世铭，陶文铨， 高等教育出版社，2006 年 8 月
课后自我总结分析	

山西能源学院教案

3 - 2 零维问题的分析法--集中参数法

一、集总参数法

1 、定义：当固体内的 $\delta/\lambda << 1/k$ 时，固体内的温度趋于一致，此时可认为整个固体在同一瞬间均处于同一温度下，这时需求解的温度仅是时间的一元函数，而与坐标无关，好象该固体原来连续分布的质量与热容量汇总到一点上，而只有一个温度值那样。这种忽略物体内部导热热阻的简化分析方法称为集总参数法。

2 、集总参数法的计算

已知：有一任意形状的物体，其体积为 V ，面积为 A ，初始温度为 t_0 ，在初始时刻，突然将其置于温度恒为 t_∞流体中，且 $t_0 > t_w$, 固体与流体间的表面传热系数 h ，固体的物性参数均保持常数。

试根据集总参数法确定物体温度随时间的依变关系。

解：① 建立非稳态导热数学模型

方法一：椐非稳态有内热源的导热微分方程：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \qquad (3\text{-}2)$$

∵物体内部导热热阻很小，忽略不计。

∴物体温度在同一瞬间各点温度基本相等，即 t 仅是 τ 的一元函数，二与坐标 x 、 y 、 z 无关，即

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \qquad (3\text{-}3)$$

∵ $\dot{\Phi}$可视为广义热源，而且热交换的边界不是计算边界（零维无任何边界）。

∴ 界面上交换的热量应折算成整个物体的体积热源，即：

$$-\Phi V = Ah(t - t_\infty) \qquad (3\text{-}4)$$

（∵ $t > t_\infty$, 物体被冷却，∴ Φ应为负值。

由（ a ），（ b ）式得： $\rho c V \frac{dt}{d\tau} = -Ah(t - t_\infty) = \Phi_\tau$ （ 3-5 ）

这就是瞬时时刻导热微分方程式。

方法二：根据能量守恒原理，建立物体的热平衡方程，即

物体与环境的对流散热量 = 物体内能的减少量

则有：$\rho c V\frac{dt}{d\tau} = -Ah(t - t_{\infty}) = \Phi_{\tau}$ （ 3-6 ）

② 物体温度随时间的依变关系

引入过余温度：$\theta = t - t_{\infty}$

则上式表示成：$\rho c V\frac{d\theta}{d\tau} = -Ah\theta$

其初始条件为：$\theta(0) = t_0 - t_{\infty} = \theta_0$

将 $\rho c V\frac{d\theta}{d\tau} = -Ah\theta$ 分离变量求解微分方程，$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho c V}d\tau$

对时间 τ 从 0 →τ积分，则：

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^{\tau}\frac{hA}{\rho c V}d\tau$$

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho c V}\tau$$

即：
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V}\tau\right) \quad (3\text{-}7)$$

其中：
$$\frac{hA}{\rho c V}\tau = \frac{hV}{\lambda A}\frac{\lambda A^2}{\rho c V^2}\tau = \frac{h(V/A)}{\lambda}\frac{a\tau}{(V/A)^2} = \mathrm{Bi}_V Fo_V$$

其中： V/A 是具有长度的量纲，记为 l；

hl/λ — —Bi_V — — 毕渥数；

$a\tau/l^2$ — —Fo_V — — 傅立叶数；

说明: Fo_V 、 Bi_V 中的特征长度为 V/A .

故得：$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \exp(-Bi_V Fo_V)$ （ 3-8 ）

由此可见，采用集总参数法分析时，物体内的过余温度随时间成指数曲线关系变化。而且开始变化较快，随后逐渐变慢。

指数函数中的 $hA/\rho c V$ 的量纲与 $1/\tau$ 的量纲相同，如果时间 $\tau = \rho c V/hA$ ，则

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \exp(-1) = 0.368 = 36.8\% \quad (3\text{-}9)$$

则：$\rho c V/hA$ 称时间常数，记为 τ_c 。

τ_c 的物理意义：表示物体对外界温度变化的响应程度。

当时间 $\tau=\tau_c$ 时，物体的过余温度已是初始过余温度值的 36.8% 。

③ 确定从初始时刻到某一瞬间这段时间内，物体与流体所交换的热流量

首先求得瞬时热流量： 将 $\frac{dt}{d\tau}$ 带入瞬时热流量的定义式得：

$$\Phi_\tau=-\rho cV\frac{dt}{d\tau}=-\rho cV(t_0-t_\infty)(-\frac{hA}{\rho cV})\exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)=(t_0-t_\infty)hA\exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)$$

（ 3-10 ）

式中负号是为了使 Φ 恒取正值而引入的。

若 $t_0<t_\infty$（物体被加热），则用 $(t_\infty-t_0)$ 代替 (t_0-t_∞) 即可。

然后求得从时间 $\tau=0$ 到 τ 时刻间的总热流量：

$$\Phi_{0\to\tau}=\int_0^\tau\Phi_\tau d\tau=(t_0-t_\infty)\int_0^\tau hA\exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)d\tau \quad (t_0-t_\infty)\rho cV[1-\exp(-\frac{hA}{\rho cV}\tau)]$$

（ 3-11 ）

3 、集总参数法的判别条件

对形如平板、圆柱和球这一类的物体，如果毕渥数满足以下条件：

$$Bi_V=h(V/A)/\lambda<0.1M \quad (3\text{-}12)$$

则物体中各点间过余温度的偏差小于 5% 。其中 M 是与物体几何形状有关的无量纲数。

无限大平板： M=1

无限长圆柱： M=1/2

球 ： M=1/3 （ 3-13 ）

毕渥数的特征长度为 V/A ，不同几何形状，其值不同，对于：

厚度为 2δ的平板：$\frac{V}{A}=\frac{A\cdot\delta}{A}=\delta$

半径为 R 的圆柱：$\frac{V}{A}=\frac{\pi R^2 l}{2\pi Rl}=\frac{R}{2}$

半径为 R 的球 ：$\frac{V}{A}=\frac{4/3\pi^3}{4\pi R^2}=\frac{R}{3}$ （ 3-14 ）

由此可见，对平板： $Bi_V=Bi$

圆柱： $Bi_V=Bi/2$

球体： $Bi_V=Bi/3$ （ 3-15 ）

二、毕渥数 Biv 与傅立叶数 Fov 的物理意义

1 、 Biv

1)定义:表征固体内部单位导热面积上的导热热阻与单位面积上的换热热阻(即外部热阻)之比。

$$Bi_v = \frac{\delta / \lambda}{1 / h} \qquad (3\text{-}16)$$

Biv 越小，表示内热阻越小，外部热阻越大。此时采用集总参数法求解更为合适。

2)物理意义： Biv 的大小反映了物体在非稳态导热条件下，物体内温度场的分布规律。

2 、 Fov

1)定义： Fov 表征两个时间间隔相比所得的无量纲时间。

$$F_{ov} = \frac{\tau}{l^2 / a} \qquad (3\text{-}17)$$

分子 τ 是从边界上开始发生热扰动的时刻起到所计时刻为止的时间间隔。分母可视为边界上发生的有限大小的热扰动穿过一定厚度的固体层扩散到 l^2 的面积上所需的时间。

2)物理意义：表示非稳态导热过程进行的程度， Fov 越大，热扰动就越深入地传播到物体内部，因而物体内各点的温度越接近周围介质的温度。